

3- мустақил иш

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

4. $y = x \cdot \cos x$.

2. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

5. $y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$.

3. $y = x + \cos x$.

4- §. Кетма-кетликнинг лимити.

Функциянинг лимити

2.4.1. Натурал сонлар тўпламида аниқланган функция *сонли кетма-кетлик* дейилади ва $\{x_n\}$ кўринишда белгиланади.

Агар шундай M мусбат сон мавжуд бўлиб, ҳар қандай натурал сон n учун

$$|x_n| \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *чегараланган кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1} > x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *ўсувчи кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1} < x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

Фақат ўсувчи ёки камаювчи кетма-кетлик *монотон кетма-кетлик* дейилади.

Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $n \geq N$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, ўзгармас a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

Ҳар қандай чегараланган ва монотон кетма-кетлик лимитга эга.

1- м и с о л. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ эканлигини исбот қилинг ва $N(\varepsilon)$ ни аниқланг.

Ечиш. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $N(\varepsilon)$ сони мавжуд бўлсаки, барча $n \geq N(\varepsilon)$ лар учун

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{2n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, лимитнинг таърифига кўра қўйилган масала ҳал бўлади. Юқоридаги тенгсизлик қуйидагига тенг кучли:

$$\frac{2}{2n+1} < \varepsilon,$$

бундан

$$2n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \text{ ёки } n > \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $N = N(\varepsilon) = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Шундай

$$\text{қилиб, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

2.4.2. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлиб, $|x - a| < \delta$ да $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлиб, барча $|x| > N$ лар учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

Агар ихтиёрий $M > 0$ учун шундай $\delta = \delta(M) > 0$ мавжуд бўлиб, $|x - a| < \delta$ да $|f(x)| > M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да *чексиз катта* дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Агар $x \rightarrow a$ да $x > a$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a + 0$ белги, агар $x \rightarrow a$ да $x < a$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a - 0$ белги қўлланилади. $f(x)$ функциянинг a нуктадаги *чап* ва *ўнг* лимитлари деб мос равишда

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ ва } f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

сонларга айтилади.

$f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги limiti мавжуд бўлиши учун $f(a-0) = f(a+0)$ бўлиши зарур ва етарли.

2.4.3. Лимитлар ҳақида қуйидаги теоремалар ўринли (лимитга ўтиш қоидалари):

а) Агар C ўзгармас бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

б) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ мавжуд бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

в) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

тенглик ўринли.

г) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}$$

тенглик ўринли.

Агар бу теоремаларнинг шартлари бажарилмаса, у ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ кўринишидаги *аниқмасликлар* пайдо бўлиши мумкин.

Бу аниқмасликлар баъзи ҳолларда алгебраик алмаштиришлар ёрдамида очилади.

2- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3}.$$

Е ч и ш. Бу мисолда касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади, яъни $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликка эгамиз.

Касрнинг сурат ва махражини n^2 га бўлсак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

3- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$$

Е чи ш. Бунда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.
 $(n+2)! = (n+1)!(n+2)$ ва $(n+3)! = (n+1)!(n+3)(n+2)$ алмаш-
тиришларни бажарсак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

4- дарсхона топириғи

1. $\{x_n\} = \{\frac{3n}{n+3}\}$ кетма-кетлик $a=3$ лимитга эга эканлигини ис-
бот қилинг ва $N(\epsilon)$ ни аниқланг.

2. Қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$. Ж: 0.

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 8}{4n^2 + 5n - 9}$. Ж: ∞ .

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$. Ж: 1.

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}$. Ж: $\frac{3}{2}$.

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$. Ж: -7.

е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$. Ж: $\frac{5}{2}$.

4- мустақил иш

Қуйидаги лимитларни топинг:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$. Ж: $-\infty$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$. Ж: 1

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}$. Ж: 0.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$. Ж: ∞ .

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}$. Ж: 3.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8} (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$. Ж: $\frac{3}{2}$.

5- §. Функциянинг лимитини ҳисоблаш

Функциянинг лимитини амалда ҳисоблаш олдинги параграфда баён қилинган теоремалар ва баъзи шакл алмаштиришларга асосланади.

1- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Е ч и ш. $x \rightarrow 2$ да касрнинг сурати $3 \cdot 2 - 2 = 4$ га, махражи эса $2^2 + 1 = 5$ га интилади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x^2+1} = \frac{4}{5}.$$

2- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

Е ч и ш. Бу мисолда касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам $x \rightarrow 1$ да нолга интилади. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратсак:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right).$$

Е ч и ш. $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x+2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4- мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x^2 + 2x}.$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Касрнинг сурати ва махражини $(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})$ ифодага кўпайтирсак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2 \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

5- дарсхона топишириғи

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 4x^3 - 1}{2x^3 + 3x^2 + 5}$. Ж: ∞ .
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$. Ж: 2.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$. Ж: -1.
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1}$. Ж: $-\frac{1}{3}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 7x + 6}$. Ж: $\frac{3}{5}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{8x-7} - 3}$. Ж: $-\frac{3}{16}$.

5- мустақил иш

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. Ж: $\frac{1}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$. Ж: $\frac{3}{4}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. Ж: 3.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. Ж: -1 .
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2-9}$. Ж: $\frac{1}{148}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$. Ж: 0 .
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$. Ж: ∞ .

6-§. Биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар

Кўпгина лимитларни топишда қуйидаги маълум формулалардан фойдаланилади:

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ — биринчи ажойиб лимит; $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ — иккинчи ажойиб лимит.

Мисоллар ечганда қуйидаги тенгликларни назарда тутиш фойдали:

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$; 11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; 11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; 11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, (a > 0)$. 11

1-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Биринчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$